

Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone en particulier !  
Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.

### Problème 1

On étudie un système de plancher suspendu installé dans une discothèque dont la piste de danse est constituée d'un réseau de modules surmontés de dalles mobiles permettant de récupérer une partie de l'énergie dépensée par le mouvement des danseurs pour alimenter entre autres une assemblée de diodes électroluminescentes (LED).

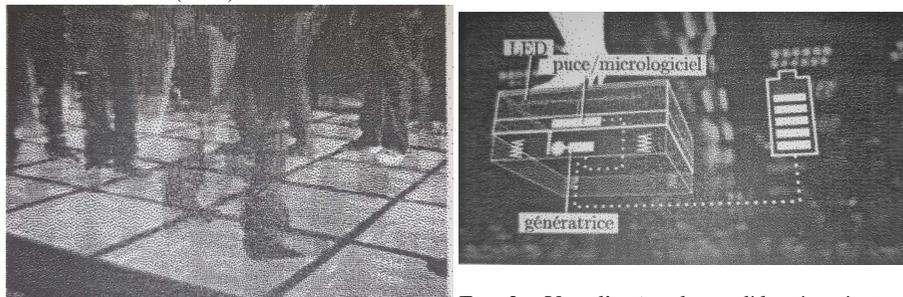


FIG. 1 : La piste de danse.

FIG. 2 : Vue d'artiste du modèle récupérateur d'énergie.

Les parties sont dans une grande mesure indépendantes.

#### Données :

- accélération de la pesanteur  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;
- rapport de transmission  $\gamma = 2,2 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$  ; facteur de conversion électromécanique  $K_t = 7,28 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$  ; résistance interne de la génératrice  $R = 19 \Omega$  ; résistance du réseau de LED  $R_L = 150 \Omega$  ; auto-inductance de la bobine  $L = 1,67 \text{ mH}$  ; rendement énergétique de la génératrice  $\eta = 50\%$  ;
- coefficient de frottement  $D = 10 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ,

### I Mouvement de la dalle : mise en équation

Pour étudier le comportement mécanique du système récupérateur d'énergie, on étudie une dalle de dimensions  $65 \text{ cm} \times 65 \text{ cm} \times 14,5 \text{ cm}$  suspendue par des ressorts mécaniques. On la modélise par une masse  $m$  reliée à un ressort idéal de longueur à vide  $\ell_0$  et de constante de raideur  $k$  ainsi qu'à un amortisseur mécanique.

On note  $\vec{g} = -g\vec{e}_x$  l'accélération du champ de pesanteur terrestre, supposée uniforme.

Le mouvement de la dalle est vertical, repéré par la coordonnée  $x$  sur l'axe vertical ascendant. Il est étudié dans le référentiel terrestre noté  $\mathcal{R}$ , considéré galiléen pour la durée de l'expérience. La vitesse de la dalle est notée  $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x$  et l'amortisseur exerce sur la masse  $m$  une force de frottement fluide d'intensité  $D|\dot{x}|$  et  $D$  une constante positive.

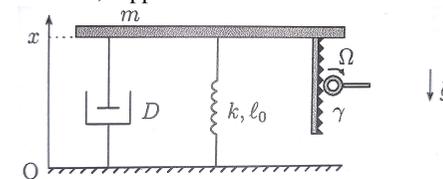


FIG. 3 : Modèle mécanique de la dalle mobile. Le déplacement linéaire vertical de la dalle est converti en mouvement de rotation par un engrenage.

1. Exprimer la force de rappel  $\vec{F}_r$  exercée par le ressort sur la dalle en fonction des données du problème.
2. Déterminer la position d'équilibre de la dalle quand elle est au repos, notée  $x_{\text{eq}}$  en fonction de  $\ell_0$ ,  $k$ ,  $m$  et  $g$ .
3. Un danseur de masse  $M$  monte sur la dalle : celle-ci se met alors en mouvement avant de stabiliser à une nouvelle position d'équilibre  $x'_{\text{eq}}$ . Exprimer littéralement  $x'_{\text{eq}}$  puis l'affaissement de la dalle,  $\delta \equiv x_{\text{eq}} - x'_{\text{eq}}$ .
4. On souhaite que cet affaissement ne dépasse pas quelques millimètres pour ne pas perturber la danse. En choisissant une valeur raisonnable pour  $M$ , proposer une valeur de  $k$  permettant, en régime quasi-statique, de respecter cette contrainte.
5. Dans les conditions d'utilisation, la dalle est soumise, en plus de son poids, de la force de rappel et de l'amortisseur mécanique à deux nouvelles forces :

- une force exercée par la personne en mouvement, notée  $\vec{F}$  ;
- une force d'amortissement électromagnétique, notée  $\vec{F}_\alpha = -\alpha \vec{v}$  dont on justifiera l'expression dans la section suivante.

On pose  $X = x - x_{\text{eq}}$ . Montrer que le mouvement de la dalle est régi par une équation différentielle de la forme :

$$\ddot{X} + \frac{D + \alpha}{m} \dot{X} + a_0 X = b_0, \quad (1)$$

avec  $a_0$  et  $b_0$  dont on donnera l'expression en fonction de  $k$ ,  $m$  et  $F$ .

### II Puissance électrique reçue par les LED

Le mouvement de translation verticale de la dalle, de vitesse  $\dot{x}(t)$  entraîne la rotation de la roue dentée de la figure 3, avec une vitesse de rotation  $\Omega$  donnée par  $\Omega = \gamma \dot{x}$ , avec  $\gamma$  une constante positive. Une génératrice convertit son énergie cinétique en énergie électrique.

On modélise la génératrice comme l'association d'une force électromotrice  $u = K_t \Omega$ , (avec  $K_t$  une constante positive) d'un résistor de résistance  $R$  et d'une bobine d'auto-inductance  $L$ . On s'intéresse à la puissance débitée par ce dipôle dans un réseau de LED assimilé à un unique résistor de résistance  $R_L$

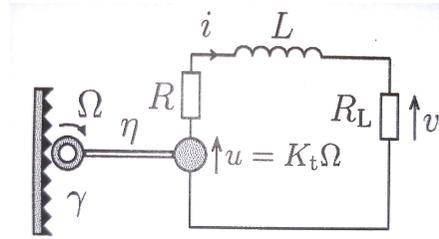


Fig. 4 : Circuit électrique équivalent.

**II.1.** On considère que la dalle est initialement immobile. On la met à l'instant initial en mouvement avec une vitesse de mobile  $v_0$  constante.

- Déterminer l'expression de l'intensité  $i$  du courant parcourant le résistor  $R_L$ .
- En déduire l'expression de la puissance reçue par le résistor  $R_L$ , notée  $\mathcal{P}_L$ .
- La dalle s'immobilise au bout d'une durée  $t_0$ . Déterminer les nouvelles expressions de l'intensité  $i$  de la puissance  $\mathcal{P}_L$ .
- Calculer, pour  $v_0 \approx 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $t_0 \approx 1 \cdot 10^{-2} \text{ s}$ , les valeurs de l'énergie reçue par  $R_L$  entre les dates  $t = 0$  et  $t = t_0$  d'une part et entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$  d'autre part. On tiendra compte de la valeur de  $t_0$  pour simplifier les expressions obtenues. Commenter.

**II.2.** (a) Établir rapidement les expressions de l'impédance complexe d'un résistor de résistance  $R$  et d'une bobine idéale d'auto-inductance  $L$  en fonction de la pulsation  $\omega$  d'excitation du circuit.

- La pulsation  $\omega$  étant celle imposée par la danse, estimer son ordre de grandeur. Justifier qu'on peut dans ces conditions négliger l'impédance de la bobine devant celle des résistors. **On effectuera cette approximation dans toute la suite.**

**II.3.** Déduire de la question précédente que la puissance électrique instantanée  $\mathcal{P}_L(t)$  reçue par le réseau de LED peut s'écrire :

$$\mathcal{P}_L(t) = A(K_t \gamma \dot{x}(t))^2, \quad (2)$$

avec  $A$  un facteur à exprimer en fonction de  $R$  et  $R_L$  uniquement.

**II.4.** La génératrice concède des pertes au cours de son fonctionnement. Son rendement est défini par :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_u(t)}{\mathcal{P}_p} \quad (0 < \eta < 1), \quad (3)$$

où  $\mathcal{P}_u(t)$  et  $\mathcal{P}_p(t)$  désignent respectivement la puissance instantanée fournie par la force électromotrice  $u$  et la puissance instantanée mécanique prélevée par la génératrice à la dalle mobile. Justifier que la puissance prélevée  $\mathcal{P}_p$  se traduit, pour la dalle, par une force de frottement de la forme

$\vec{F}_\alpha = -\alpha \vec{v}$  (voir la question **I.5**) Déterminer l'expression et calculer la valeur de  $\alpha$ . Justifier le commentaire du constructeur<sup>i</sup> :

« When energy is generated for lighting, the damping<sup>ii</sup> of the system is determined by the dc generator and its electrical load. In that case, the mechanical damping may be neglected ».

### III Réponse indicielle

Dans cette partie, on impose à la dalle, initialement à sa position d'équilibre et immobile un échelon de force  $F = F_0$  à partir de l'instant  $t = 0$  et on cherche à quantifier la puissance fournie au réseau de LED. En utilisant les parties précédentes, l'équation du mouvement de la dalle peut être approchée par :

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = \frac{F_0}{m}, \quad (4)$$

où  $X = x - x_{\text{eq}}$  (voir la Section I).

**Données :** masse  $m = 35 \text{ kg}$ , constante de raideur  $k = 1,5 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , coefficient de frottement  $\alpha = 3,0 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ .

**III.1.** Mettre cette équation sous la forme canonique :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_{\text{eq}}. \quad (5)$$

Préciser les expressions de  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $X_{\text{eq}}$ . Rappeler succinctement ce que représentent ces grandeurs et calculer les valeurs de  $\omega_0$  et  $Q$ .

**III.2.** (a) Établir les expressions générales des solutions de l'équation homogène associée à (5).

- En déduire que, compte-tenu des ordres de grandeur, la solution de l'équation (5) peut s'écrire de façon approchée :

$$X(t) \approx B \left[ 1 - \frac{1}{1 - Q^2} \left( e^{-\omega_0 Q t} - Q^2 e^{-\omega_0 t / Q} \right) \right]. \quad (6)$$

- Dans cette question seulement**, on débranche la génératrice de l'oscillateur mécanique. Quelle est alors la nature de la réponse à l'échelon de force ? On tracera l'allure de  $X(t)$ . Dans toute la suite, la génératrice est de nouveau branchée.

**III.3.** Déduire de l'expression (6) que, dans le cadre du modèle développé à la question **II.3**, la puissance électrique instantanée reçue par les LED s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{P}_L(t) = K F_0^2 \left( e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\omega_0 t / Q} \right)^2, \quad (7)$$

avec  $K$  un facteur constant.

<sup>i</sup> dans *Human-powered small-scale generation system for a sustainable dance club*, IEEE Industry Applications Magazine, 2011.

<sup>ii</sup> amortissement.

III.4. Déterminer l'expression et la valeur de l'instant où  $|\dot{X}|$  atteint son maximum ainsi que l'expression de ce maximum. On pourra simplifier les expressions obtenues compte-tenu de l'ordre de grandeur de  $Q$ .

III.5. Dans l'expression de  $\mathcal{P}_L(t)$  une exponentielle converge beaucoup plus vite que l'autre : déterminer laquelle. Montrer alors qu'aux temps longs,  $\mathcal{P}_L(t)$  décroît exponentiellement, selon un temps caractéristique noté  $\tau$ , à exprimer en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .

III.6. La figure 5 représente l'évolution de la puissance électrique prédite sous l'effet de plusieurs échelons de force successifs d'intensités différentes.

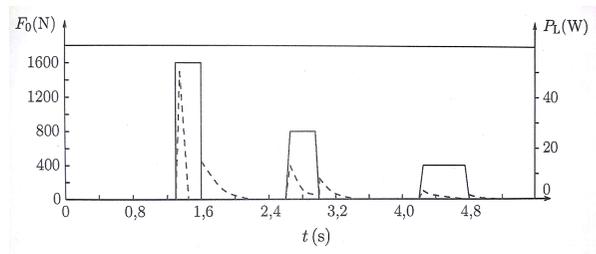


FIG. 5 : figure  
Évolution temporelle de la force et de la puissance électrique.

- Associer à chaque courbe (en trait plein, en pointillés) la grandeur correspondante :  $F_0, \mathcal{P}_L$ . Indiquer les intervalles temporels pendant lesquels sont appliqués des échelons de force, ainsi que les valeurs de  $F_0$  associées.
- Commenter la cohérence de l'ordre de grandeur des valeurs de  $\mathcal{P}_L$  avec les conclusions de la question III.4.
- Comparer les variations de la puissance maximale produite par un échelon avec l'intensité de  $F_0$  et commenter.
- Estimer à partir de la figure 5 un ordre de grandeur du temps caractéristique  $\tau$  et comparer aux conclusions de la question III.5.
- Estimer grossièrement, et à partir de la figure 5, un ordre de grandeur de l'énergie produite par un échelon de force.

## IV Forçage sinusoïdal

Dans les situations d'utilisation, l'individu exerce sur la dalle une force  $\vec{F}$  dont la norme est mesurée par un capteur de force. Les mesures sont représentées sur la figure 6.

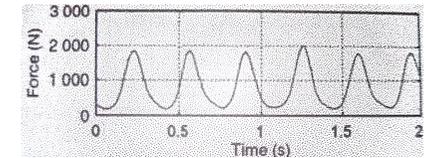


FIG. 6 : Évolution expérimentale de la force  $F$  exercée par le danseur (de masse 83 kg) sur la dalle au cours du temps.

IV.1. On modélise ce signal de manière approximative par l'expression :

$$F = F_0 + F_1 \cos(\omega t + \varphi). \quad (8)$$

Estimer les valeurs des coefficients  $F_0, F_1$  et  $\omega$  sur la figure 6.

IV.2. En redéfinissant  $X$  comme l'écart entre la position de la dalle et sa position d'équilibre atteinte lorsque l'individu est immobile, l'équation du mouvement de la dalle peut s'écrire :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{F_1}{m} \cos(\omega t + \varphi), \quad (9)$$

avec  $\omega_0$  et  $Q$  définis dans la partie précédente. En régime sinusoïdal établi,  $X$  a pour expression :

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t + \Psi). \quad (10)$$

On lui associe la grandeur complexe  $\underline{X}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \Psi)}$ .

Déterminer l'expression de l'amplitude  $X_0$  des oscillations de la dalle en fonction de  $\omega_0, Q, m, \omega$  et  $F_1$ . En déduire l'expression de l'amplitude  $V_0$  des oscillations de la vitesse  $\dot{X}(t)$  en fonction des mêmes paramètres.

IV.3. En utilisant les résultats des parties précédentes, on montre (non demandé) que la moyenne temporelle de la puissance fournie aux LED s'exprime selon :

$$\langle \mathcal{P}_L \rangle = \frac{(\eta F_1 K_t)^2 R_L \gamma^2}{2K_t^4 \gamma^4 + 2\eta^2 k m (R + R_L)^2 [(\omega/\omega_0) - (\omega_0/\omega)]^2} \quad (11)$$

On s'intéresse dans la suite à l'influence de l'un des paramètres  $\omega, \gamma$  ou  $R_L$  sur  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$ , les autres paramètres étant maintenus constants.

- Déterminer les comportements asymptotiques de  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$  aux hautes et basses fréquences. Déterminer l'expression puis la valeur de la pulsation pour laquelle  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$  est maximale. Tracer l'allure qualitative de  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$  en fonction de  $\omega$ .

(b) Ce système a été testé en 2015 dans l'émission télévisée « On n'est pas que des cobayes ». On y comparait l'énergie produite par ce système par deux équipes similaires dansant, pendant la même durée :

- l'une un morceau à 115 battements par minute,
- l'autre un morceau 125 battements par minute.

Quelle équipe a produit la plus grande énergie ? Quel était l'écart relatif entre les deux énergies produites ?

IV.4. La courbe de la figure 7 présente les évolutions de  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$  en fonction de  $R_L$  et  $\gamma$ , à  $\omega$  fixée.

(a) Justifier, à l'aide de l'expression (11), les allures générales des variations de  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$

- avec  $\gamma$  d'une part,
- avec  $R_L$  d'autre part,

observées sur la courbe de la figure 7.

(b) Quelles valeurs de  $\gamma$  et  $R_L$  proposeriez-vous pour dimensionner le dispositif ?

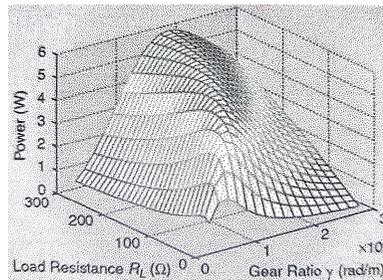


FIG. 7 : Évolution de la puissance électrique produite à  $\omega$  fixée en fonction de  $\gamma$  et ( $R_L$ )

## V Alimentation électrique des LED

Partie à n'aborder qu'après avoir traité le problème suivant.

Dans cette section, on insère les LED, assimilées à une résistor de résistance  $R_L$  dans le montage représenté sur la figure 8

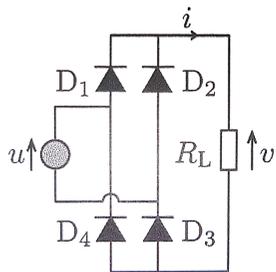


FIG. 8 : Circuit d'alimentation des LED.

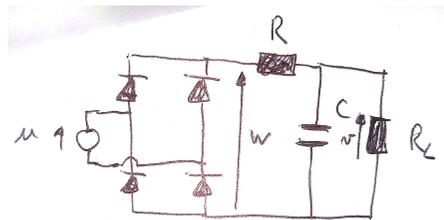


FIG. 9 : Circuit de lissage.

V.1. La caractéristique d'une diode idéale est donnée à la figure 10.

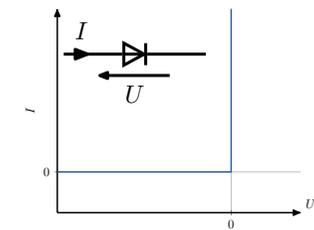


FIG. 10 : Caractéristique d'une diode idéale.

(a) Préciser quelles parties de la caractéristique correspondent aux comportements dit « bloquants » et « passant » de la diode. Par quel dipôle peut-on la remplacer dans chacune de ces parties ?

(b) Si la tension  $u$  est positive, déterminer le comportement bloquant ou passant de chacune des 4 diodes et en déduire une relation simple entre  $u$  et  $v$ . Traiter de même le cas où  $u$  est négative.

(c) On considère désormais que  $u(t)$  est sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . Déduire des conclusions précédentes l'allure de  $v(t)$  et tracer les évolutions temporelles de  $u(t)$  et  $v(t)$  sur une même courbe.

(d) Sachant que les LED ont une caractéristique proche de celle de la figure 10 et n'émettent de lumière que quand elles sont passantes, justifier que l'utilisation du pont de diodes de la figure 8 légitime les modélisations précédentes des LED par le résistor  $R_L$ .

V.2. Le scintillement des LED quand elles sont alimentées par une tension  $u$  sinusoïdale est inconfortable. On souhaite « lisser » le courant d'intensité  $i$  dans la LED, en rajoutant un dispositif assimilé à un condensateur en parallèle du résistor  $R_L$  (voir la figure 9).

(a) Si la tension  $w$  de la figure 9 était sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , exprimer le rapport des amplitudes complexes  $\underline{V}$  et  $\underline{W}$  associées en fonction de  $C, R, R_L$  et  $\omega$ .

(b) En déduire, pour une tension  $u$  sinusoïdale d'amplitude  $U_0$  de fréquence  $f \approx 1$  Hz, un ordre de grandeur de la valeur de  $C$  permettant d'obtenir une tension quasi-stationnaire  $v(t) \approx V_0$ . On précisera l'expression de  $V_0$ . Commenter l'ordre de grandeur de  $C$  obtenu.

## Problème 2 : Amortissement harmonique

On étudie comment traiter la sortie d'un filtre pour diminuer l'amplitude d'une éventuelle résonance.

On suppose qu'un régime sinusoïdal est établi. On utilisera les notations complexes.

Dans les calculs de gain, on sera amené à utiliser l'approximation  $\log(2) \approx 0,30$ .

### I Filtre original

On considère le filtre de la Figure 11, utilisé en sortie ouverte.

I.1. (a) Déterminer sans calcul sa nature.

(b) Établir l'expression de sa fonction de transfert en régime sinusoïdal établi de pulsation  $\omega$ , notée  $H_1$ . On n'y fera figurer que la pulsation  $\omega$ , les constantes  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  et  $Q = \sqrt{L/C}/R$ , et des nombres sans dimension.

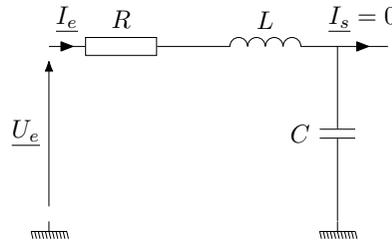


FIG. 11 : Filtre original, de fonction de transfert  $H_0$ .

(c) On note  $G_{dB}$  le gain en décibel. Déterminer une condition sur  $Q$  pour qu'il existe des valeurs de  $\omega$  pour laquelle  $G_{dB}$  est strictement positif. Établir dans ce cas les expressions du maximum de  $G_{dB}$  et de la pulsation pour laquelle il est atteint.

I.2. Établir et tracer le diagramme de Bode en phase et en gain (en dB) pour  $Q = 0,2$  et  $Q = 6$ .

I.3. Déterminer l'intervalle de fréquences pour lesquelles  $G_{dB} \geq 10$  si  $L = 10$  mH,  $C = 100$  nF et  $R = 50 \Omega$ .

### II Identification de filtres

On considère le filtre de la Figure 12 utilisé en sortie ouverte.

II.1. (a) Déterminer sans calcul sa nature.

(b) Établir l'expression de sa fonction de transfert, en utilisant les expressions de  $Q'$  et  $\omega'_0$  définies comme à la Section I et en déduire les expressions asymptotiques de  $G_{dB}$ .

II.2. (a) En déduire, parmi les diagrammes de Bode de la Figure 16 celui correspondant au filtre de la Figure 12.

(b) Proposer une expression simple de la fonction de transfert du filtre de la Figure 12 en fonction de celle du filtre de la Figure 11 (dans laquelle on remplacerait  $Q$  par  $Q'$  et  $\omega_0$  par  $\omega'_0$ ).

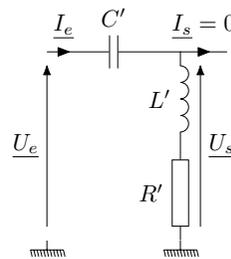


FIG. 12 : Filtre inconnu.

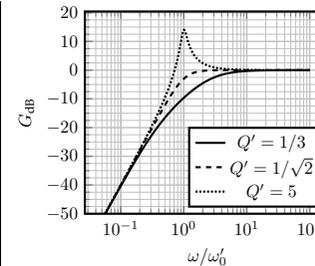


FIG. 13

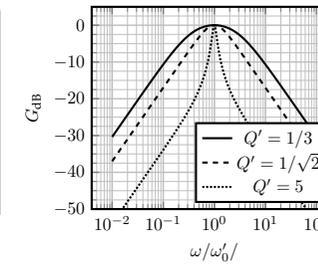


FIG. 14

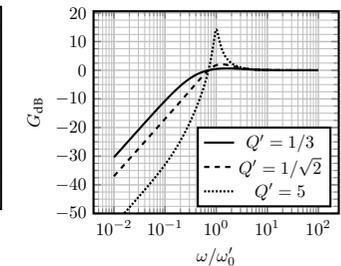


FIG. 15

FIG. 16 : Diagrammes de Bode proposés pour le filtre de la figure 12.

II.3. On étudie enfin le filtre de la Figure 17.

(a) Déterminer sans calcul sa nature. On pourra s'inspirer du résultat de la question II.2b. En déduire l'allure du diagramme de Bode (en  $G_{dB}$ ).

(b) Préciser la valeur minimale du module de l'impédance de l'association du condensateur et de la bobine. Pour quelle valeur de la pulsation est-elle réalisée ?

(c) Déterminer les valeurs de  $\omega$  pour lesquelles  $G_{dB} \geq -3$  dB. Calculer les fréquences correspondantes pour les valeurs d'auto-inductance, de capacité et de résistance de la question I.3.

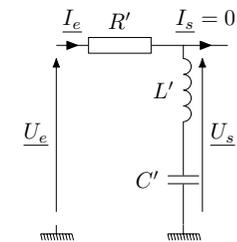


FIG. 17 : Filtre rectificateur.

### III Écrêtage du filtre original

On considère le filtre original de la Section I pour lequel le facteur de qualité  $Q$  est strictement supérieur à  $1/\sqrt{2}$ . On note  $G_{dBmax}$  la valeur du maximum de son gain.

On souhaite corriger la sortie de ce filtre pour limiter les valeurs du gain pour les pulsations au voisinage de  $\omega_0$ . On filtre pour cela la sortie du filtre de la Figure 11 par le filtre de la Figure 17. Le diagramme de Bode idéal en gain du filtre obtenu est représenté sur la Figure 18.

- III.1.** (a) Comment doit-on choisir les valeurs de  $L'$  et  $C'$  par rapport à  $L$  et  $C$  pour obtenir ce comportement ? Que peut-on alors dire de la valeur de  $G_{dB}$  pour  $\omega = \omega_0$  ? On suppose ces relations vérifiées dans toute la suite.
- (b) Décrire qualitativement l'effet d'une variation de la résistance  $R'$  sans changer  $L'$  ni  $C'$ . Représenter l'allure de  $G_{dB}$  en fonction de  $\omega$  pour une valeur de  $R'$  notablement supérieure à celle correspondant à la Figure 18.

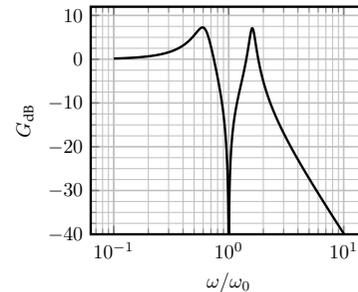


FIG. 18 : Diagramme de Bode du filtre de la Figure 11 rectifié par le filtre de la Figure 17.

- III.2.** Contrairement au cas de la Figure 18, on observe que la valeur du gain en  $\omega = \omega_0$  reste bornée.
- (a) Montrer que la prise en compte d'une résistance interne, notée  $r_L$ , dans la bobine  $L'$  du filtre de la Figure 17 permet de justifier cette observation. On déterminera pour cela l'expression de la nouvelle fonction de transfert en  $\omega = \omega_0$ .
- (b) On considère qu'on a  $R' = R$  et on prend les valeurs numériques de la question I.3. Déterminer la valeur de  $r_L$  si on mesure un gain de  $-30$  dB pour  $\omega = \omega_0$ . On n'hésitera pas à utiliser des approximations dont on justifiera la pertinence au vu des valeurs numériques manipulées.
- (c) On conserve les valeurs précédentes pour  $R, L, C$  et on prend  $L' = L$ ;  $C' = C$  et  $R' = R$ . Comment choisir la valeur de  $r_L$  pour avoir un gain pratiquement égal à  $0$  dB en  $\omega = \omega_0$ . Tracer alors l'allure du diagramme de Bode en gain du filtre obtenu.

## Correction du problème 1

## I Mouvement de la dalle : mise en équation

I.1. On a par définition de  $k$  et  $\ell_0$  :

$$\vec{F}_r = -k(x - \ell_0)\vec{e}_x.$$

I.2. À l'équilibre la force de rappel du ressort  $\vec{F} = -k(x_{\text{eq}} - \ell_0)\vec{e}_x$  compense le poids  $-mg\vec{e}_x$ , soit :  $x_{\text{eq}} = \ell_0 - mg/k$ .

I.3. L'homme étant solidaire de la masse quand ils sont au repos, le ressort est comprimé par le poids d'une masse  $m + M$ . L'équation précédente donne maintenant  $x'_{\text{eq}} = \ell_0 - (m + M)g/k$  soit un affaissement de :

$$\delta \equiv x_{\text{eq}} - x'_{\text{eq}} = Mg/k.$$

I.4. On peut poser  $M \approx 75\text{kg}$ , on aura alors :

$$\delta \leq \delta_{\text{max}} = 1\text{mm} \quad \text{pour : } k \geq \frac{Mg}{\delta_{\text{max}}} = 7,3 \cdot 10^5 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

I.5. La loi de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x} = -mg - k(x - \ell_0) + F_x - D\dot{x} - \alpha\dot{x} \rightarrow \ddot{x} + \frac{D + \alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}\left(x - \ell_0 - \frac{mg}{k}\right) = \frac{F_x}{k},$$

de la forme demandée avec :

$$X = x - \left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\right) \quad a_0 = \frac{k}{m} \quad b_0 = \frac{F_x}{m}.$$

## II Puissance électrique reçue par les LED

II.1. (a) La vitesse de la dalle étant constante, la force électromotrice l'est également, on a donc l'association série d'un dipôle de résistance  $R + R_L$  et d'auto-inductance  $L$  soumis à une tension constante  $U_0 = K_t \gamma v_0$ . L'équation différentielle vérifiée par  $i$  est :

$$U_0 = (R + R_L)i + L\frac{di}{dt},$$

La dalle étant initialement immobile, le courant est nul et avant l'ébranlement de la dalle et le reste immédiatement après car il doit être continu dans la bobine. L'unique solution vérifiant cette condition initiale est alors :

$$i = \frac{E_0}{R + R_L} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec : } \tau = \frac{L}{R + R_L}.$$

(b) Le résistor  $R_L$  reçoit la puissance :

$$\mathcal{P}_L = R_L i^2 = \frac{E_0^2 R_L}{(R + R_L)^2} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2.$$

(c) L'équation différentielle est identique en changeant  $U_0$  par 0. La condition initiale est maintenant donnée  $i(t_0) \equiv I_{t_0}$  avec  $I_{t_0}$  la valeur de l'intensité donnée en  $t_0^-$  par l'expression précédente ce qui donne :

$$i(t > t_0) = I_{t_0} e^{-(t-t_0)/\tau} \rightarrow \mathcal{P}(t > t_0) = R_L I_{t_0}^2 e^{-2(t-t_0)/\tau}.$$

(d) On calcule  $\tau = L/(R + R_L) = 1,0 \cdot 10^{-5}\text{s}$ , très court devant  $t_0$ . L'intensité a donc atteint sa valeur asymptotique en  $t = t_0$  soit  $I_{t_0} \approx U_0/(R + R_L)$ . On calcule donc les énergies :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{0 \rightarrow t_0} &= \frac{R_L U_0^2}{(R + R_L)^2} \int_0^{t_0} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2 dt & \mathcal{E}_{t_0 \rightarrow \infty} &= R_L I_{t_0}^2 \int_{t_0}^{\infty} \left(e^{-2(t-t_0)/\tau}\right) dt \\ &= \frac{U_0^2 R_L}{(R + R_L)^2} \int_0^{t_0/\tau} \tau \left(1 - e^{-y}\right)^2 dy & &\approx \frac{U_0^2 R_L}{(R + R_L)^2} \int_0^{\infty} \tau \left(e^{-2y}\right) dy \\ &= \frac{U_0^2 L R_L}{(R + R_L)^3} \int_0^{(R+R_L)t_0/L} \left(1 - e^{-y}\right)^2 dy & &= \frac{U_0^2 L R_L}{(R + R_L)^3} \int_0^{\infty} \left(e^{-2y}\right) dy \\ &= \frac{U_0^2 L R_L}{(R + R_L)^3} \left(\frac{t_0}{\tau} - e^{-t_0/\tau} + \frac{e^{-2t_0/\tau}}{2}\right) & &= \frac{U_0^2 L R_L}{2(R + R_L)^3} = 1,3 \cdot 10^{-1} \text{J} \\ &\approx \frac{U_0^2 R_L t_0}{(R + R_L)^2} = 1,3 \cdot 10^2 \text{J} \end{aligned}$$

On a négligé dans  $\mathcal{E}_{0 \rightarrow t_0}$  les termes en exponentielles devant 1. Dans  $\mathcal{E}_{t_0 \rightarrow \infty}$ , on a fait l'approximation  $I_{t_0} \approx U_0/(R + R_L)$ . L'essentiel de l'énergie  $\mathcal{E}_{0 \rightarrow t_0}$  est reçue pendant la phase où l'intensité a atteint sa valeur stationnaire : elle est très supérieure à  $\mathcal{E}_{t_0 \rightarrow \infty}$  pour laquelle la valeur stationnaire du courant est nulle et à laquelle seule contribue la phase de décroissance rapide de l'intensité.

II.2. (a) On a  $Z = R$  pour un résistor et  $Z = jL\omega$  pour une bobine.

(b) On peut estimer  $f \approx 2\text{Hz}$ . On a alors, pour la bobine :  $Z = L\omega = 2,1 \cdot 10^{-2}\Omega$  très négligeable devant les résistances en série avec celle-ci.

II.3. En négligeant la bobine, un pont diviseur de tension donne  $v = R_L u/(R + R_L)$ . Comme  $u = K_t \gamma \dot{x}$ , on calcule :

$$\mathcal{P}_L = \frac{v^2}{R_L} = \frac{(K_t \gamma \dot{x})^2 R_L}{(R_L + R)^2}, \quad (12)$$

de la forme demandée avec  $A = R_L / (R_L + R)^2$ .

**II.4.** Un calcul analogue au précédent assure que la puissance  $\mathcal{P}_R$  reçue par le résistor  $R$  a la même expression, en remplaçant la constante  $A$  par  $A' = AR/R_L$ . On a alors :

$$u = Ri + R_L i \rightarrow ui = Ri^2 + R_L i^2 \rightarrow \mathcal{P}_u = \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_L \rightarrow \mathcal{P}_u = \frac{R + R_L}{R_L} \mathcal{P}_L \rightarrow \mathcal{P}_p = \frac{R + R_L}{\eta R_L} \mathcal{P}_L$$

Par ailleurs, la puissance prélevée est l'opposé de la puissance de la force  $\vec{F}_\alpha$ . On a donc :

$$\mathcal{P}_p = F_\alpha |\dot{x}| = \alpha \dot{x}^2 \rightarrow \alpha = \frac{(K_t \gamma)^2}{\eta(R + R_L)} = 3,0 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Cette valeur est très largement supérieure au coefficient  $D$ , en accord avec la précision du fabricant selon laquelle le frottement mécanique est négligeable devant celui dû à la production d'énergie électrique pour alimenter les LED.

### III Réponse indicielle

**III.1.** On a immédiatement :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 65 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} = 7,6 \cdot 10^{-2} \quad X_{\text{eq}} = \frac{F_0}{k}.$$

**III.2.** (a) On cherche les solutions de l'équation différentielle homogène sous la forme  $e^{rt}$ . On obtient l'équation algébrique vérifiée par  $r$  :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \rightarrow r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2},$$

puisque  $Q < 1/2$ .

(b) On utilise tout d'abord la condition  $Q \ll 1$  pour simplifier les racines au moyen de DLs au terme non nul d'ordre le plus bas en  $Q$  de  $\sqrt{1 - 4Q^2} \approx 1 - 2Q^2$

$$r_- \approx -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{2Q} = -\frac{\omega_0}{Q} \quad r_+ \approx -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} (1 - 2Q^2) = -\omega_0 Q.$$

Par ailleurs la solution particulière est immédiatement  $X = X_{\text{eq}}$ . La solution est générale s'écrit donc :

$$X(t) = X_{\text{eq}} + X_1 e^{-\omega_0 Q t} + X_2 e^{-\omega_0 t / Q},$$

avec  $X_1$  et  $X_2$  des constantes telles que les conditions initiales  $X(0)$  et  $\dot{X}(0) = 0$  soient vérifiées.

- L'expression proposée a pour limite  $B$  en  $t \rightarrow \infty$ . On doit donc choisir  $B = X_{\text{eq}}$  ;
- elle vérifie immédiatement  $X(0) = 0$  ;

• on calcule :

$$\dot{X}(t) = \frac{Q X_{\text{eq}} \omega_0}{1 - Q^2} \left( e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\omega_0 t / Q} \right) \quad (13)$$

qui vérifie également  $\dot{X}(0) = 0$ .

C'est donc l'unique solution vérifiant les conditions initiales. Notons qu'on pourrait également y simplifier  $1 - Q^2 \approx 1$ .

(c) Débrancher la génératrice revient à supprimer le terme d'amortissement en  $\alpha$ . Il ne reste alors plus que l'amortissement mécanique de coefficient  $D$ . On a alors  $Q = \sqrt{km}/D = 2,3 \cdot 10^2 \gg 1/2$ . Le mouvement est alors pseudopériodique : la plaque oscille très longtemps à chaque échelon de force.

**III.3.** Les expressions (13) et (12) donnent :

$$\mathcal{P}_L = \frac{(K_t \gamma)^2 R_L}{(R_L + R)^2} \frac{(Q F_0)^2}{km(1 - Q^2)^2} \left( e^{-\omega_0 Q t} - e^{-\omega_0 t / Q} \right)^2, \quad (14)$$

de la forme demandée avec  $K = (K_t \gamma Q)^2 R_L / [k(R_L + R)(1 - Q^2)]^2$ .

**III.4.** On dérive par rapport au temps l'expression de la vitesse :

$$\begin{aligned} \ddot{X} &\propto Q e^{-\omega_0 Q t} - \frac{e^{-\omega_0 t / Q}}{Q} \rightarrow \ddot{X} = 0 \quad \text{pour : } Q^2 = e^{\omega_0 t (Q - 1/Q)} \\ &\rightarrow \omega_0 t_{\text{max}} = \frac{-2Q \ln(Q)}{1 - Q^2} \approx -2Q \ln(Q) \end{aligned} \quad (15)$$

pour  $Q \ll 1$ . Les arguments des deux exponentielles sont alors :

- $-\omega_0 t_{\text{max}} Q = 2Q^2 \ln(Q) \ll 1$
- $-\omega_0 t_{\text{max}} / Q = -\ln(Q) \gg 1$

La première exponentielle est donc peu différente de 1 et la deuxième négligeable devant 1.

On en déduit les expressions des maxima de  $\dot{X}$  et de  $\mathcal{P}_L$  correspondantes (en approximant  $1 - Q^2 \approx 1$ ) :

$$\dot{X}_{\text{max}} \approx Q X_{\text{eq}} \omega_0 = \frac{Q F_0}{\sqrt{km}} \quad \mathcal{P}_{L,\text{max}} \approx \frac{(K_t \gamma F_0)^2 R_L Q^2}{km(R_L + R)^2}. \quad (16)$$

**III.5.** Les constantes de temps des exponentielles sont  $1/(\omega_0 Q)$  et  $Q/\omega_0 \ll 1/(\omega_0 Q)$ . Aux temps longs, seule demeure l'exponentielle lente, de constante de temps  $\tau = 1/(\omega_0 Q)$ . On a donc :

$$\mathcal{P}_L \approx K F_0^2 e^{-2\omega_0 Q t}, \quad (17)$$

de constante de temps  $1/(2\omega_0 Q)$ .

- III.6.** (a) Les échelons de force sont en trait continu, de durées environ égales à 0,4s ; 0,6s et 0,8s et d'intensités 1600N ; 800N et 400N.
- (b) Pour l'échelon d'intensité 1600N on lit une puissance maximale d'environ 50W. La formule (16) donne 38W, du même ordre de grandeur.
- (c) La formule (7) prédit que  $\mathcal{P}_L$  varie comme le carré de  $F_0$ . Sur les différents échelons  $F_0$  décroît à chaque fois d'un facteur 1/2 et l'amplitude du pic de  $\mathcal{P}_L$  semble décroître d'environ 1/4.
- (d) On lit, en utilisant l'intersection de la tangente à l'origine avec  $\mathcal{P}_L = 0$  :  $\tau \approx 0,2$ s. L'expression de la question III.5 donne :

$$\tau = \frac{1}{2\omega_0 Q} = 0,1 \text{ s}$$

du même ordre de grandeur.

- (e) On a  $\mathcal{E}_L = \int \mathcal{P}_L dt$ . On la détermine donc graphiquement comme l'intégrale sous la courbe de  $\mathcal{P}_L$ . La faible précision de ces courbes autorise à les approximer par des triangles.... On a alors, pour le premier échelon de force :

$$\mathcal{E}_L \approx \frac{50 \times 0,2}{2} + \frac{15 \times 0,2}{2} \approx 6,5 \text{ J}$$

## IV Forçage sinusoïdal

- IV.1.** On lit une valeur moyenne  $F_0 = 1 \cdot 10^3 \text{ N}$  et une amplitude  $F_1 = 800 \text{ N}$ . La période est  $(1,9 - 0,2)/5 = 0,34$ s, soit une fréquence de 3,0Hz et  $18 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

- IV.2.** Les résultats du cours donnent immédiatement, avec  $u = \omega/\omega_0$  :

$$\frac{X_0}{\omega_0} = \frac{F_1/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} \rightarrow X_0 = \frac{F_1/k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + u^2/Q^2}} \quad (18)$$

On en déduit :

$$\frac{V_0}{\omega_0} = \frac{j\omega F_1/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} \rightarrow V_0 = \frac{F_1/\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 + Q^2(u-1/u)^2}} \quad (19)$$

- IV.3.** (a) La puissance moyenne  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$  a pour équivalents :

$$\langle \mathcal{P}_L \rangle \underset{\omega \ll \omega_0}{\approx} \frac{(F_1 K_t \gamma \omega)^2 R_L}{2km(R+R_L)^2 \omega_0^2} = \frac{(F_1 K_t \gamma \omega)^2 R_L}{2k^2 (R+R_L)^2} \quad (20)$$

$$\langle \mathcal{P}_L \rangle \underset{\omega \gg \omega_0}{\approx} \frac{(F_1 K_t \gamma \omega_0)^2 R_L}{2km(R+R_L)^2 \omega^2} = \frac{(F_1 K_t \gamma)^2 R_L}{2m^2 (R+R_L)^2 \omega^2} \quad (21)$$

Elle est immédiatement maximale pour  $\omega = \omega_0$  où elle vaut  $\mathcal{P}_{L,\max} = \frac{(RF_1)^2 R_L}{2(K_t \gamma)^2}$ . Son allure est donnée sur la figure ci-contre.

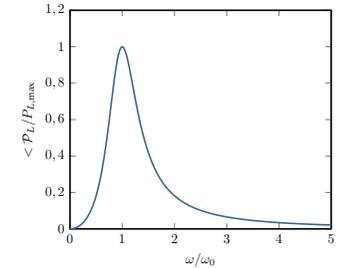


FIG. 19 : Allure de  $\mathcal{P}_L$  en fonction de  $\omega$ .

- (b) La fréquence propre  $f_0 = \omega_0/(2\pi) = 10,5 \text{ Hz}$  correspond à un rythme de 625 battements par minute, bien supérieure aux rythmes dansés. La courbe de la figure 19 assure que c'est le rythme à 125bpm qui devrait produire la plus grande énergie. En utilisant l'approximation de l'expression (20) entre les deux rythmes de fréquences  $f_1$  et  $f_2$  avec  $f_2 - f_1 \ll f_m = \frac{f_2 + f_1}{2}$  sera environ :

$$\frac{f_2^2 - f_1^2}{f_m^2} \approx \frac{(f_2 - f_1)(f_2 + f_1)}{f_m^2} \approx \frac{2(f_2 - f_1)}{f_m} = 17\%. \quad (22)$$

- IV.4.** (a) L'expression (11) de  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$  assure que :

- à  $R_L$  et  $\omega$  constantes,  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$  varie avec  $\gamma$  comme  $x^2/(x^4 + A)$  qui est nulle en  $\gamma = 0$  et pour  $\gamma \rightarrow \infty$  et passe par un maximum entre les deux, comme l'illustre la courbe de la figure 7.
- à  $\gamma$  et  $\omega$  constantes,  $\langle \mathcal{P}_L \rangle$  varie avec  $R_L$  comme  $x/(x^2 + A)$  qui varie de la même manière. La limite vers 0 quand  $R_L \rightarrow \infty$  n'est pas aussi claire mais on observe sur la figure 7 la valeur nulle en  $R_L = 0$  et la présence d'un maximum quand  $R_L$  croît.

- (b) Les valeurs de  $\gamma$  et  $R_L$  donnant une puissance maximale sont  $R_L = 300 \Omega$  et  $\gamma = 2 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$ .

## V Alimentation électrique des LED

- V.1.** (a) La diode est « passante » pour  $u = 0; I \geq 0$  : elle est alors équivalente à un interrupteur fermé. Elle est « bloquante » pour  $U \leq 0; I = 0$  : elle est alors équivalente à un interrupteur ouvert.

(b) Quand  $u > 0$  la loi des mailles assure que la somme des tensions aux bornes de  $D_3, R_L$  et  $D_1$  est strictement positive ce qui est cohérent avec un comportement passant de ces deux diodes et  $i \geq 0$ . À l'inverse la tension aux bornes de  $D_2, R_L$  et  $D_4$  est strictement négative, ce qui est cohérent avec un comportement bloquant de ces deux diodes. En remplaçant  $D_1$  et  $D_3$  par des interrupteurs fermés et  $D_2$  et  $D_4$  par des interrupteurs ouverts, on obtient  $v = u$  soit  $i = u/R_L \geq 0$ , cohérent avec un comportement passant de  $D_1$  et  $D_3$ .

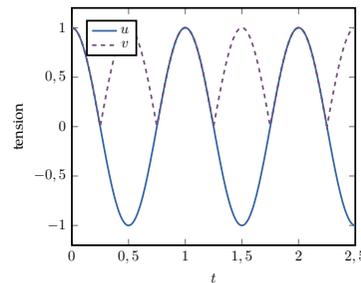


FIG. 20 : Redressement double-alternance par un pont de diodes.

Le même raisonnement assure que ce sont  $D_2$  et  $D_4$  qui sont passantes quand  $u \leq 0$ , ce qui donne  $u = -v$  soit  $i = -u/R_L \geq 0$ .

- (c) On obtient les courbes ci-contre.  
 (d) Sans le pont de diodes,  $R_L$  aurait été soumise à une tension alternativement positive et négative. Or elle modélise une LED qui ne sera passante que si la tension à ses bornes est positive et sera donc éteinte pendant la moitié du temps. Le pont de 4 diodes permet d'assurer une tension à ses bornes toujours positive pour qu'elle soit toujours lumineuse. En revanche son intensité variera avec les variations périodiques de  $|u|$ .

V.2. (a) Un pont diviseur de tension donne, en régime sinusoïdal établi et après calculs (en utilisant une transformation Thévenin/Norton par exemple) :

$$\frac{V}{W} = \frac{R_L/(jC\omega)}{R + R_L/(jC\omega)} = \frac{R_L}{R + R_L + jRR_L C\omega} = \frac{R_L/(R + R_L)}{1 + jC\omega \frac{RR_L}{R + R_L}} \quad (23)$$

On reconnaît un passe-bas du premier ordre de gain en bande passante  $H_0 = R_L/(R + R_L)$  et de pulsation de coupure  $\omega_c = 1/R_{eq}C$  avec  $R_{eq} = \frac{RR_L}{R + R_L}$ .

(b) Pour  $u$  sinusoïdale de pulsation  $\omega$ , le signal  $w$  a une valeur moyenne non nulle et des oscillations périodiques de pulsation  $2\omega$ . Pour  $\omega \gg \omega_c$  tous les harmoniques seront atténués par le filtre et seule demeurera la valeur moyenne, constante. Il faut pour cela avoir :

$$R_{eq}C\omega \gg 1 \rightarrow C \gg \frac{1}{R_{eq}\omega} = \frac{R + R_L}{RR_L\omega} = 9,3 \cdot 10^{-2} \text{ F} \quad (24)$$

bien plus élevé que les capacités des condensateurs utilisés en TP : il faudra disposer de condensateurs électrochimiques.

On calcule par ailleurs :

$$V_0 = \frac{2U_0}{T} \int_0^{T/2} \cos(2\pi t/T) dt = \frac{2U_0}{\pi} \quad (25)$$

## Correction du problème 2

### I Filtre original

I.1. (a) Les modèles équivalents en haute et basse fréquence assurent qu'il s'agit du passe-bas du 2<sup>e</sup> ordre vu en cours.

(b) Un pont diviseur de tension (puisqu'on est en sortie ouverte) assure :

$$H = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (26)$$

avec les paramètres proposés.

(c) Comme vu en cours, le gain  $H|H|$  admet un maximum strictement positif si  $Q > 1/\sqrt{2}$  en  $\omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$  où il vaut  $H_{max} = Q/\sqrt{1 - 1/(4Q^2)}$ . On a alors  $G_{dBmax} = 20\log(H_{max})$ . Pour les paramètres de la question suivante on obtient  $G_{dBmax} = 16$ .

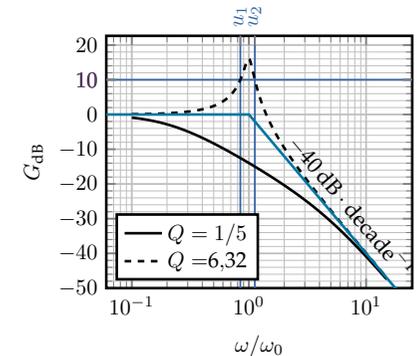


FIG. 21

I.2. On détermine les asymptotes du gain à basse et haute fréquence  $G_{dB} = 0$  et  $G_{dB} = -40\text{dB/décade}$ . Les phases dans ces domaines valent respectivement 0 et  $-\pi$  et  $-\pi/2$  en  $\omega = \omega_0$ . Le diagramme de Bode correspondant est représenté sur la figure 21 (on y a représenté le cas de la question suivante, avec  $Q = 6,3$ ).

I.3. Pour les valeurs proposées, on calcule :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 5,03 \cdot 10^3 \text{ Hz} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 6,3.$$

Le gain maximal vaut (cf. I.1c)  $G_{dBmax} \approx 20\log(Q) = 16$ . Il sera supérieur à 10 pour les fréquences comprises entre  $f_{c1}$  et  $f_{c2}$  pour lesquelles  $H = 10^{10/20} \equiv H_1$ . On résout donc, en utilisant  $u \equiv f/f_0$ .

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} = \sqrt{10} \rightarrow \frac{f_{c1}}{f_0} = 8,45 \cdot 10^{-1} \text{ et } \frac{f_{c2}}{f_0} = 1,12 \rightarrow f_{c1} = 4,25 \text{ kHz et } f_{c2} = 5,65 \text{ Hz.} \quad (27)$$

### II Identification de filtres

II.1. (a) • À haute fréquence la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert et un pont diviseur de tension assure que  $\underline{U_s} = \underline{U_e}$ .

- À basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et aucun courant ne circule dans l'association série de la bobine et du résistor : la tension  $y$  est donc nulle.

Le filtre est donc un passe-haut.

- (b) Un pont diviseur de tension assure que sa fonction de transfert, notée  $H'$  est :

$$\underline{H}' = \frac{R' + jL'\omega}{R'jL'\omega + \frac{1}{jC'\omega}} = \frac{jR'C'\omega - L'C'\omega^2}{1 + jR'C'\omega - L'C'\omega^2} = \frac{j\frac{\omega}{Q'\omega'_0} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_0}}{1 + j\frac{\omega}{Q'\omega'_0} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_0}} \quad (28)$$

$$\frac{H'}{\omega \ll \omega'_0} \sim j\frac{\omega}{Q'\omega'_0} \quad G_{dB} \sim -20\log(Q) + 20\log(\omega/\omega'_0) \quad (29)$$

$$\frac{H'}{\omega \gg \omega'_0} \sim 1 \quad G_{dB} \sim 0 \quad (30)$$

- II.2. (a) Par rapport au passe-haut du deuxième ordre habituel, l'asymptote basse fréquence est à 20dB/decade et a une ordonnée à l'origine qui dépend de  $Q$ , d'autant plus basse que  $Q$  est élevé. Son diagramme de Bode est donc celui de la figure 15.

- (b) La tension  $\underline{U}_s$  est  $\underline{U}_s = \underline{U}_e - \underline{U}_{C'}$  avec  $\underline{U}_{C'}$  la tension aux bornes du condensateur qui était la tension de sortie du filtre de la figure 11. On a donc :

$$\underline{H}' = 1 - \underline{H}_0. \quad (31)$$

- II.3. (a) Que ce soit à haute ou basse fréquence, l'impédance de l'association série de la bobine et du condensateur tend vers l'infini car l'un de ces deux dipôles est alors équivalent à un interrupteur ouvert. Un simple diviseur de tension assure alors que  $\underline{U}_s = \underline{U}_e$ . Le filtre est donc passant à haute et basse fréquences. Il s'agit vraisemblablement d'un coupe-bande.

On peut également retrouver ce résultat en adaptant le raisonnement de la question II.2b. On sait que la tension aux bornes du résistor d'un RLC série permet d'obtenir un passe-bande (de fonction de transfert  $\underline{H}_R$ ), la tension aux bornes de l'association série de  $L'$  et  $C'$  permet donc d'obtenir la fonction de transfert  $\underline{H}_{Cb} = 1 - \underline{H}_R$  : elle est donc nulle pour  $\omega = \omega'_0 = 1/\sqrt{L'C'}$  et égale à 1 pour  $\omega \ll \omega'_0$  et  $\omega \gg \omega'_0$ . Son diagramme de Bode est représenté sur la figure ci-contre.

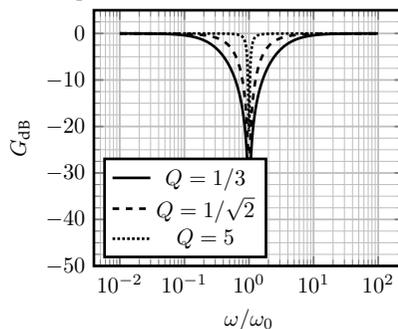


FIG. 22

- (b) L'impédance de l'association série de  $L'$  et  $C'$  est  $jL'\omega + 1/(jC'\omega)$  : elle est nulle pour  $\omega'_0 = 1/\sqrt{L'C'}$ .

- (c) On exprime la fonction de transfert :

$$\underline{H}_{Cb} = 1 - \frac{1}{1 + jQ'\left(\frac{\omega}{\omega'_0} - \frac{\omega'_0}{\omega}\right)} = \frac{jQ'\left(\frac{\omega}{\omega'_0} - \frac{\omega'_0}{\omega}\right)}{1 + jQ'\left(\frac{\omega}{\omega'_0} - \frac{\omega'_0}{\omega}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{j}{Q'\left(\frac{\omega}{\omega'_0} - \frac{\omega'_0}{\omega}\right)}} \quad (32)$$

$$\rightarrow H_{Cb} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2\left(\frac{\omega}{\omega'_0} - \frac{\omega'_0}{\omega}\right)^2}}}$$

Les pulsations pour lesquelles  $H = 1/\sqrt{2}$  sont celles pour lesquelles  $Q\left(\frac{\omega}{\omega'_0} - \frac{\omega'_0}{\omega}\right) = \pm 1$ . Les calculs sont les mêmes que pour la finesse du filtre passe-bande faits en cours : les solutions positives sont :

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega'_0}{2Q'} \left( \sqrt{1 + 4Q'^2} \pm 1 \right) \rightarrow f_+ = 5,45 \text{ kHz} \quad f_- = 4,65 \text{ kHz} \rightarrow f_+ - f_- = \frac{f'_0}{Q'}. \quad (33)$$

### III Écrêtage du filtre original

- III.1. Le montage devient celui de la figure 23. Attention, sa fonction de transfert n'est pas le produit de celle du passe-bas par celle du coupe-bande puisque le passe-bas n'est pas en sortie ouverte.

- (a) On doit choisir la fréquence centrale du coupe bande pour qu'elle coïncide avec la fréquence  $\omega_0$  du passe-bas du 2<sup>nd</sup> ordre, soit :

$$\omega'_0 = \omega_0 \rightarrow LC = L'C'. \quad (34)$$

En effet, comme l'impédance de l'association  $L-C$  sera nulle pour cette fréquence, la tension en sortie de filtre y sera nulle.

- (b) Les expressions (34) assurent que plus  $Q'$  est grand plus les fréquences  $f_+$  et  $f_-$  sont proches. Augmenter  $R'$  diminuera  $Q'$  et élargira donc la zone coupée, ce qui diminue également les valeurs maximales atteintes par le coupe-bande comme on le voit sur la figure 24.

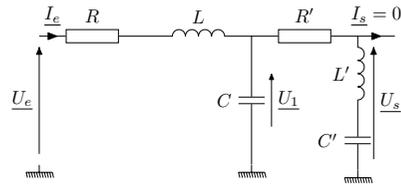


FIG. 23 : Filtre passe-bas de la figure 11 rectifié par le coupe-bande de la figure 17.

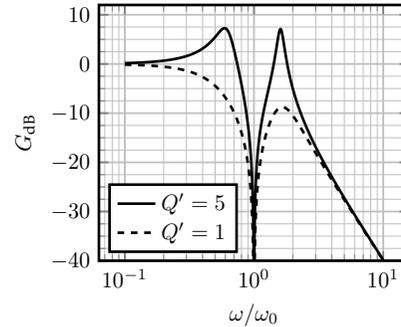


FIG. 24 : Effet du facteur de qualité du filtre coupe-bande sur le passe-bas rectifié.

III.2. (a) L'impédance de l'association série  $r_L - L' - C'$  est :

$$\underline{Z} = r_L + jL'\omega + \frac{1}{jC'\omega} \underset{\omega=\omega'_0}{=} r_L \quad (35)$$

La fonction de transfert du filtre coupe-bande a donc pour valeur, en  $\omega = \omega'_0$  :

$$\underline{H}' = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R'} \underset{\omega=\omega'_0}{=} \frac{r_L}{r_L + R'} \neq 0, \quad (36)$$

dont le minimum n'est plus nul. On imagine alors que l'annulation de la tension de sortie en  $\omega_0$  de la pulsation n'est plus possible. On le confirme en calculant explicitement la fonction de transfert du filtre de la figure 23.

L'expression de l'équation (36) permet de calculer l'amplitude du filtre de la figure 23. On a en effet, en notant  $\underline{Z}'$  l'impédance de l'association parallèle du condensateur  $C$  et de l'association série de  $R', L'$  et  $C'$  :

$$\underline{H} = \frac{U_s}{U_1} \frac{U_1}{U_2} = \underline{H}' \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}' + R + jL\omega}.$$

On calcule par ailleurs :

$$\frac{1}{\underline{Z}'} = jC\omega + \frac{1}{R' + jL'\omega + \frac{1}{jC'\omega} + r_L} \underset{\omega=\omega_0}{=} jC\omega_0 + \frac{1}{R' + r_L} \rightarrow \underline{Z}' \underset{\omega=\omega_0}{=} \frac{R' + r_L}{1 + j(R' + r_L)C\omega_0},$$

soit, pour  $LC\omega_0^2 = 1$ , en utilisant  $Q = L\omega_0/R = 1/(RC\omega_0)$  :

$$\begin{aligned} \underline{H} \underset{\omega=\omega_0}{=} & \frac{r_L}{r_L + R} \frac{R' + r_L}{R' + r_L + R + jL\omega + jR(R' + r_L)C\omega - (R' + r_L)LC\omega_0^2} \\ & = \frac{r_L}{R + jL\omega_0 + jR(R' + r_L)C\omega_0} = \frac{r_L/R}{1 + j\left(Q + \frac{R' + r_L}{QR}\right)} \\ \rightarrow G_{dB} & = 20\log(r_L/R) - 10\log\left(1 + \left(Q + \frac{R' + r_L}{QR}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (37)$$

Cette expression de la fonction de transfert n'est effectivement plus nulle n  $\omega = \omega_0$ .

(b) En supposant  $(r_L + R)/(QR) \ll Q$ , on a  $G_{dB} \approx 20\log(r_L/R) - 10\log(1 + Q^2)$  et on calcule alors  $G_{dB} = -30$  dB pour  $r_L/R = 0,2$  soit  $r_L = 3,2\Omega$ . On vérifie que l'hypothèse est bien légitime puisque pour ces valeurs  $(R + r_L)/(QR) \approx 1/Q \ll Q$  pour  $Q = 6,3$ .

(c) L'expression précédente donne, pour avoir  $G_{dB} = 0$  en  $\omega = \omega_0$  :

$$r_L = R\sqrt{1 + Q^2} = 319\Omega. \quad (38)$$

Le calcul sans approximation donne  $r_L = 385\Omega$ . On représente sur la figure 25 le diagramme de Bode correspondant.

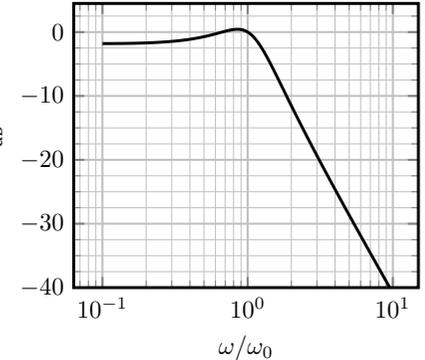


FIG. 25 : Rectification de la résonance d'un passe-bas du 2<sup>e</sup> ordre par un coupe-bande pour obtenir un gain nul en  $\omega = \omega_c$ .